東京電機大学工学部第二部情報通信工学科「コンピュータグラフィックスとモデリング」 2008 年 9 月 16 日

線型代数学と立体解析幾何学～点・直線分・平面・法線ベクトル～

1. 位置とベクトル

点 P: 原点からの点 P へ向かうベクトル＝**位置ベクトル**

ベクトル vector を座標と間違えないように列ベクトルで書くことにする。

ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ は，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書ける。

ここで $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は基底ベクトルで，$\left|\vec{e}_x\right| = \left[\vec{e}_y\right[= \left|\vec{e}_z\right| = 1$ である。

このとき, この座標系を**正規直交座標系**という。

2. ベクトルの演算いろいろ

スカラー倍: $\vec{c} = c\vec{a} = \begin{pmatrix} c \cdot a_x \\ c \cdot a_y \\ c \cdot a_z \end{pmatrix}$

ベクトルの大きさ: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$

ベクトルの和: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$

点 $\vec{a}$ と点 $\vec{b}$ の距離: $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2}$

ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\theta = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$: スカラー

ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & a_x & b_x \\ \vec{e}_y & a_y & b_y \\ \vec{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_x + \begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$

3. 平面図形の表現

図形 $S = \left\{(x, y) \middle| f(x, y) = 0\right\}$: 条件 $f(x, y) = 0$ を満たす座標値（位置）の集合

(a) 点

(b) 直線

① 陽関数表現

$y = ax + b$

② 陰関数表現

$ax + by + c = 0$

③ 陽／陰関数表現

1. $\alpha(x - x_0) = y - y_0$

ここで，α : 勾配のスカラー表現

2. $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$

④　パラメトリック表現

1. $\begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

点 $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を通り，勾配が $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ である直線分。ここで，t:パラメータ parameter，媒介変数である。

また，$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ は勾配のベクトル表現である。

2. $\vec{P}(t) = (1-t)\vec{P}_1 + t\vec{P}_2$

点 $\vec{P}(t)$ は点 $\vec{P}_1$，点 $\vec{P}_2$ 間を $(1-t):t$ に内分した点である。ただし，$0 \leqq t \leqq 1$ である。

4. 平面図形の表現（続き）

(c)　平面

1. 平面は，平面上の1点と，平面に垂直な方向を与えると定まる。垂直な方向はベクトルで表す。このベクトルを法線ベクトルという。

点 $\vec{P}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ を含み，法線ベクトルが $\vec{N} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ である平面の方程式を求める。平面に含まれる点を $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とするとき，点 $\vec{P}_0$ から $\vec{P}$ へ向かうベクトル $\vec{P} - \vec{P}_0$ は法線ベクトル $\vec{N}$ と直交するので，

$\left(\vec{P} - \vec{P}_0\right) \bullet \vec{N} = 0$ である。したがって，

$$\underline{\vec{P} \bullet \vec{N} = \vec{P}_0 \bullet \vec{N}}$$

が求める平面の方程式である。

$\left(\vec{P} - \vec{P}_0\right) \bullet \vec{N} = 0$ を展開すると，

$$\left(x - x_0\right) \cdot n_x + \left(y - y_0\right) \cdot n_y + \left(z - z_0\right) \cdot n_z = 0$$

となる。定数項を右辺に移動して整理すると，

$$\underline{n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = n_x \cdot x_0 + n_y \cdot y_0 + n_z \cdot z_0}$$

が得られる。ここで $a = n_x, b = n_y, c = n_z, d = -(n_x \cdot x_0 + n_y \cdot y_0 + n_z \cdot z_0)$ とおくと，よく見慣れた平面の方程式が得られる。

$$\underline{ax + by + cz + d = 0}$$

2. 3 点を通る平面の方程式を求める。

求める平面の方程式を

$$ax + by + cz + d = 0$$

とすれば、この平面が点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，$P_3(x_3, y_3, z_3)$，を通ることから、

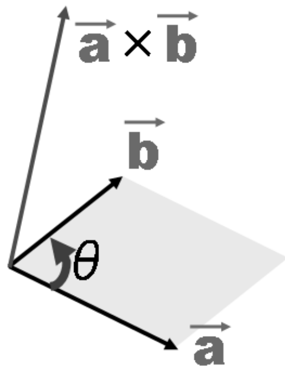
$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$$
$$ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0$$

これら 4 つの式から，同時には 0 でない a, b, c, d を消去して

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

これが求める平面の方程式である。

5. 平面の法線ベクトル



平面は平面内の1点と平面に垂直な方向を与えると定まる。
垂直な方向はベクトルで表す。このベクトルを**法線ベクトル**という。

一方，空間の平行でない 2 つのベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$とし，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとする。

このとき，次のようにして定まるベクトルを$\vec{a}$と$\vec{b}$の外積といい，$\vec{a}\times\vec{b}$と表す。

$\vec{a}\times\vec{b}$の大きさは$\vec{a}$と$\vec{b}$によってつくられる平行四辺形の面積である

$\vec{a}\times\vec{b}$の向きは$\vec{a}$と$\vec{b}$によって定まる平面に垂直な方向で，$\vec{a}$と$\vec{b}$の向きと一致させるように角度θだけ回転させるとき，右ねじの進む向きである。

したがって，同一平面上の 2 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の外積$\vec{a}\times\vec{b}$を求め，これをこの平面の法線ベクトルとすればよい。
外積の求め方【前掲】

$$\vec{a}\text{と}\vec{b}\text{の外積}:\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & a_x & b_x\\ \vec{e}_y & a_y & b_y\\ \vec{e}_z & a_z & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & b_y\\ a_z & b_z\end{vmatrix}\vec{e}_x+\begin{vmatrix}a_z & b_z\\ a_x & b_x\end{vmatrix}\vec{e}_y+\begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix}\vec{e}_z=\begin{pmatrix}a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y\\ a_z\cdot b_x-a_x\cdot b_z\\ a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\end{pmatrix}$$

6. 平面と点の位置関係

ある点が平面より上にあるか，下にあるか，平面上にあるかを知るには，どうすればよいだろうか？
点の座標値を平面の方程式に代入し，符号を見ればよい。